Cours 0: Interlude, Rappels d'analyse: dérivation-intégration

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module: R5.04 Traitement numérique des données

Introduction

Motivations :

- Se remettre rapidement à jour sur la notion de dérivée ! ! !

Introduction

Motivations :

- Se remettre rapidement à jour sur la notion de dérivée ! ! !

1. Notion de dérivée
   - Construction de la fonction dérivée
   - Techniques de calcul de la dérivée
2. Intégration
   - Notion de primitive
   - Intégrales

Notion de dérivée

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, on cherche un procédé pour étudier le comportement (variation) de f

Notion de dérivée

Soit f une fonction de $[a;b] \to \mathbb{R}$, on cherche un procédé pour étudier le comportement (variation) de f
$\to$ On va fabriquer un outil, une nouvelle fonction, que l'on notera f', qui nous donnera des informations sur la fonction initiale f.

$$f \quad \rightsquigarrow \quad f'$$

Notion de dérivée

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, on cherche un procédé pour étudier le comportement (variation) de f
$\to$ On va fabriquer un outil, une nouvelle fonction, que l'on notera f', qui nous donnera des informations sur la fonction initiale f.

$$f \quad \rightsquigarrow \quad f'$$

(i) Comprendre l'interprétation, le "sens physique" de la fonction f'.
(ii) Connaître la "technique" de fabrication de f', à partir de f.

Notion de dérivée

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, on cherche un procédé pour étudier le comportement (variation) de f
$\to$ On va fabriquer un outil, une nouvelle fonction, que l'on notera f', qui nous donnera des informations sur la fonction initiale f.

$$f \quad \rightsquigarrow \quad f'$$

(i) Comprendre l'interprétation, le "sens physique" de la fonction f'.

(ii) Connaître la "technique" de fabrication de f', à partir de f.

Rappels sur les équations de droite

- Une droite D non paralléle à l'axe des ordonnées à une équation de la forme

$$y = mx + p$$

  - m s'appelle le coefficient directeur ou pente. Si A et B sont deux de D, alors
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Rappels sur les équations de droite

- Une droite D non paralléle à l'axe des ordonnées à une équation de la forme

$$y = mx + p$$

  - m s'appelle le coefficient directeur ou pente. Si A et B sont deux de D, alors
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
  - p s'appelle l'ordonnée à l'origine

Rappels sur les équations de droite

- Une droite D non paralléle à l'axe des ordonnées à une équation de la forme

$$y = mx + p$$

  - m s'appelle le coefficient directeur ou pente. Si A et B sont deux de D, alors
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
  - p s'appelle l'ordonnée à l'origine

Interprétation de ces deux nombres.

Rappels sur les équations de droite

- Une droite D non paralléle à l'axe des ordonnées à une équation de la forme

$$y = mx + p$$

  - m s'appelle le coefficient directeur ou pente. Si A et B sont deux de D, alors
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
  - p s'appelle l'ordonnée à l'origine

  Interprétation de ces deux nombres.
- Droite paralléle à l'axe des ordonnées,

Rappels sur les équations de droite

- Une droite D non paralléle à l'axe des ordonnées à une équation de la forme

$$y = mx + p$$

  - m s'appelle le coefficient directeur ou pente. Si A et B sont deux de D, alors
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
  - p s'appelle l'ordonnée à l'origine

  Interprétation de ces deux nombres.
- Droite paralléle à l'axe des ordonnées, équation $x = c$.

Rappels sur les équations de droite

- Une droite D non paralléle à l'axe des ordonnées à une équation de la forme

$$y = mx + p$$

  - m s'appelle le coefficient directeur ou pente. Si A et B sont deux de D, alors
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
  - p s'appelle l'ordonnée à l'origine

  Interprétation de ces deux nombres.
- Droite paralléle à l'axe des ordonnées, équation $x = c$. Pente infinie.

idée de base

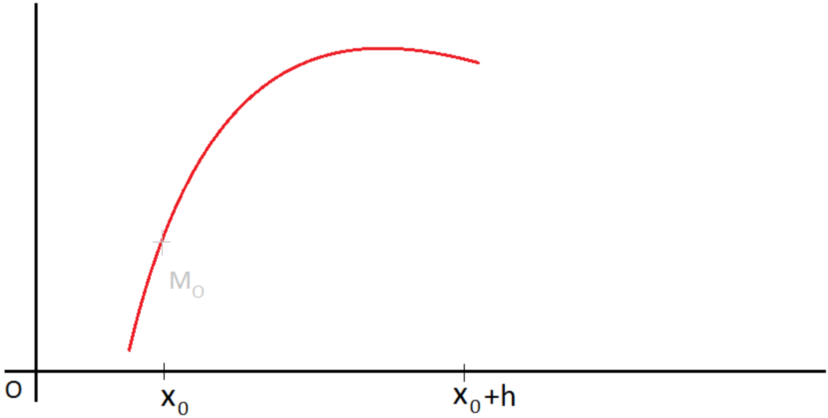
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in]a; b[$, on veut étudier f au voisinage de x_0.

idée de base

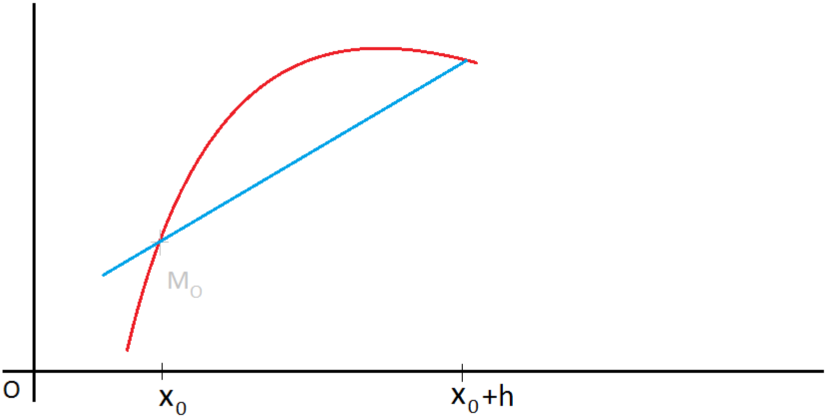
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in]a;b[$, on veut étudier f au voisinage de x_0.

$\to$ On va "approximer" f au voisinage de x_0, par des cordes.

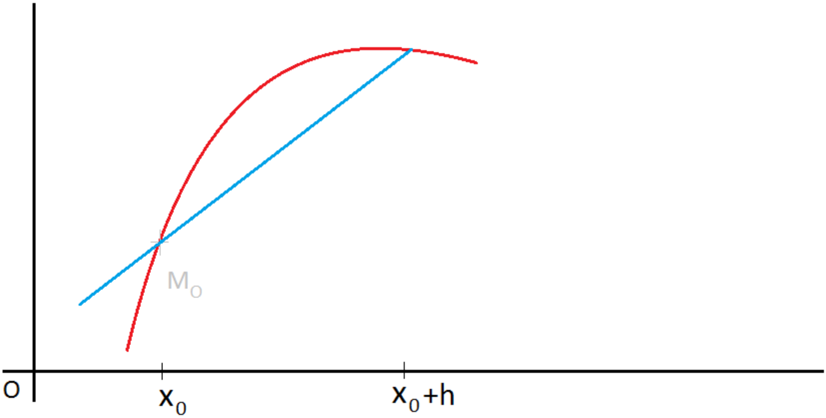
Vers la tangente



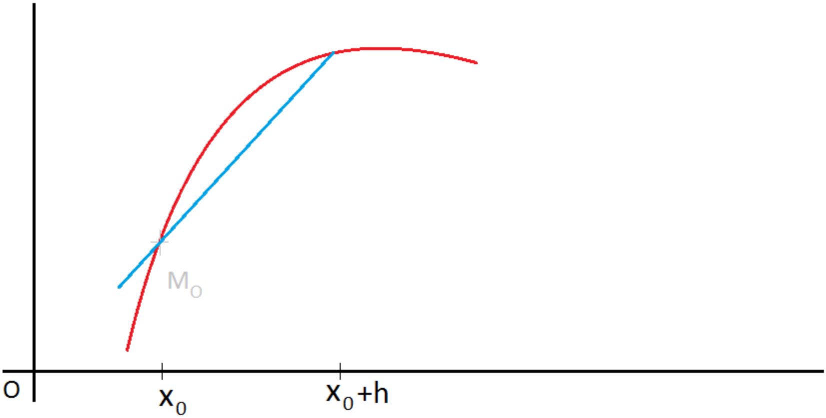
Vers la tangente



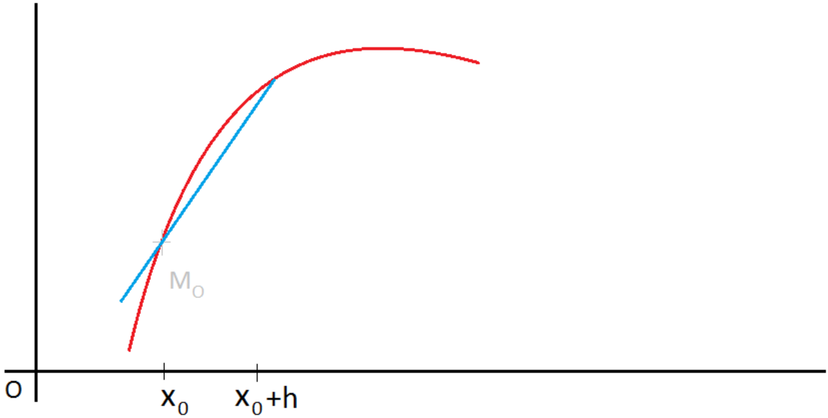
Vers la tangente



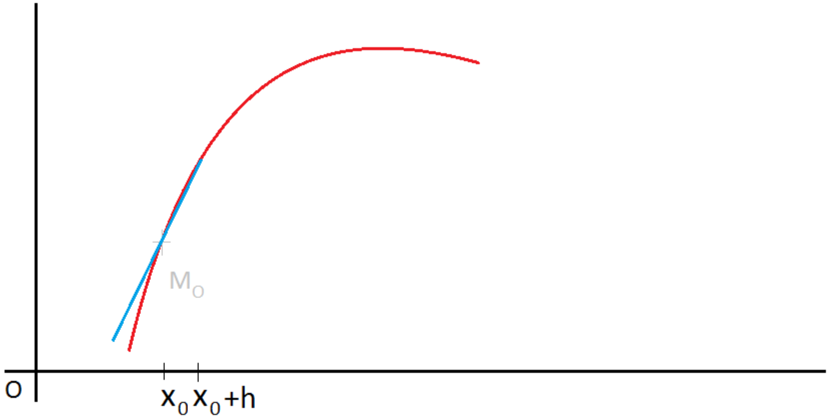
Vers la tangente



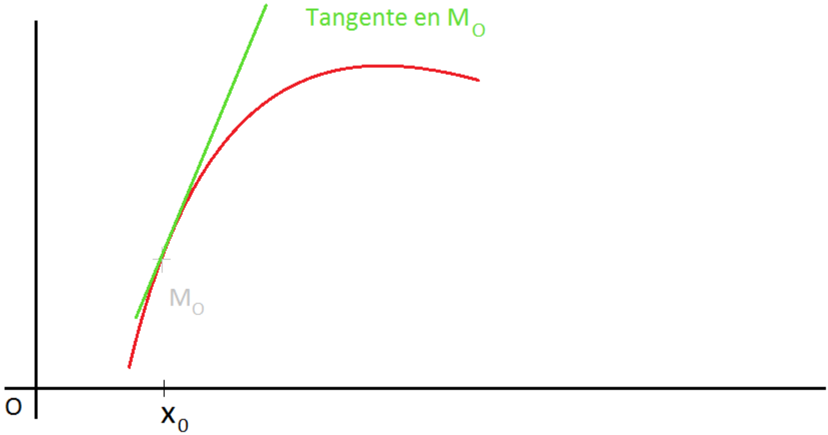
Vers la tangente



Vers la tangente



Vers la tangente



Pente d'une corde

$$\text{Coeff directeur d'une corde} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(aussi appelé "taux de variation")

Pente d'une corde

$$\text{Coeff directeur d'une corde} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(aussi appelé "taux de variation")

Parfois cette expression admet une limite quand h tend vers 0.

Définition :

On dit que f est dérivable en x_0, si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{existe.}$$

Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ la valeur de cette limite (nombre dérivée en x_0).

Pente d'une corde

$$\text{Coeff directeur d'une corde} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(aussi appelé "taux de variation")

Parfois cette expression admet une limite quand h tend vers 0.

Définition :

On dit que f est dérivable en x_0, si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{existe.}$$

Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ la valeur de cette limite (nombre dérivée en x_0).

- $f'(x_0)$ est donc le coeff directeur de la tangente en x_0.

Pente d'une corde

$$\text{Coeff directeur d'une corde} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(aussi appelé "taux de variation")

Parfois cette expression admet une limite quand h tend vers 0.

Définition :

On dit que f est dérivable en x_0, si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{existe.}$$

Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ la valeur de cette limite (nombre dérivée en x_0).

- $f'(x_0)$ est donc le coeff directeur de la tangente en x_0.
- On comprend alors le lien entre le signe de $f'(x_0)$ et la variation de f au voisinage de x_0.

Remarque

Il existe des fonctions pour lesquelles, la limite précédente n'existe pas. On dit qu'elles ne sont pas dérivables en x_0.

Remarque

Il existe des fonctions pour lesquelles, la limite précédente n'existe pas. On dit qu'elles ne sont pas dérivables en x_0.
Exemples :

- $f(x) = |x|$ en 0.

Remarque

Il existe des fonctions pour lesquelles, la limite précédente n'existe pas. On dit qu'elles ne sont pas dérivables en x_0.
Exemples :

- $f(x) = |x|$ en 0.
- $f(x) = \sqrt{x}$ en 0.

Sens physique du nombre $f'(x_0)$.

- Donne une indication sur la vitesse avec laquelle $f(x)$ varie à coté de x_0.

Sens physique du nombre $f'(x_0)$.

- Donne une indication sur la vitesse avec laquelle $f(x)$ varie à coté de x_0.
- Exemple : Soit une voiture repérée par un point A_t à l'instant t, qui se déplace sur l'axe (Ox).

Sens physique du nombre $f'(x_0)$.

- Donne une indication sur la vitesse avec laquelle $f(x)$ varie à coté de x_0.
- Exemple : Soit une voiture repérée par un point A_t à l'instant t, qui se déplace sur l'axe (Ox). Soit,

$$f(t) = OA_t \quad (\text{ distance entre 0 et } A_t).$$

Sens physique du nombre $f'(x_0)$.

- Donne une indication sur la vitesse avec laquelle $f(x)$ varie à coté de x_0.
- Exemple : Soit une voiture repérée par un point A_t à l'instant t, qui se déplace sur l'axe (Ox). Soit,

$$f(t) = OA_t \quad (\text{ distance entre } 0 \text{ et } A_t).$$

Que vaut f' ?

Sens physique du nombre $f'(x_0)$.

- Donne une indication sur la vitesse avec laquelle $f(x)$ varie à coté de x_0.
- Exemple : Soit une voiture repérée par un point A_t à l'instant t, qui se déplace sur l'axe (Ox). Soit,

$$f(t) = OA_t \quad (\text{ distance entre 0 et } A_t).$$

Que vaut f' ?

Sens physique du nombre $f'(x_0)$.

- Donne une indication sur la vitesse avec laquelle $f(x)$ varie à coté de x_0.
- Exemple : Soit une voiture repérée par un point A_t à l'instant t, qui se déplace sur l'axe (Ox). Soit,

$$f(t) = OA_t \quad (\text{ distance entre 0 et } A_t).$$

Que vaut f' ?

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
c (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	2x	$\mathbb{R}$
$x^n, \; n \in \mathbb{N}^\star$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^\star$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^\star$
$x^\alpha, \; \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^\star$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$

Règles de calculs

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

Règles de calculs

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$
\begin{array}{c|c}
(u+v)' = u' + v' & (\lambda u)' = \lambda u' \\
(uv)' = u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} & (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
(e^u)' = u'e^u & \Big(\ln(|u|)\Big)' = \frac{u'}{u}
\end{array}
$$

Règles de calculs

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$
\begin{array}{c|c}
(u+v)' = u' + v' & (\lambda u)' = \lambda u' \\
(uv)' = u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} & (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
(e^u)' = u'e^u & \Big(\ln(|u|)\Big)' = \frac{u'}{u}
\end{array}
$$

Plus généralement, $\quad (u \circ v)' = v' \times u'(v)$

Règles de calculs

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{c|c}
(u+v)' = u' + v' & (\lambda u)' = \lambda u' \\
(uv)' = u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} & (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
(e^u)' = u'e^u & \Big(\ln(|u|)\Big)' = \frac{u'}{u}
\end{array}$$

Plus généralement, $\quad (u \circ v)' = v' \times u'(v)$

(u ne doit pas s'annuler lorsque elle apparaît en dénominateur.)

Exemples

Dériver :

$$f_1(x) = 3x^2 - 5x + 7, \qquad f_2(x) = e^{-4x+1},$$
$$f_3(x) = \frac{3x+1}{x-1}, \qquad f_4(x) = \ln(x^2 + 5x + 1).$$

Dérivées partielles, notations

Parfois, on aura à étudier des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, par exemple $f(x, y)$

Dérivées partielles, notations

Parfois, on aura à étudier des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, par exemple $f(x, y)$
Si f est une fonction numérique de plusieurs variables, la fonction dérivée partielle de f par rapport à l'une d'elles s'obtient en dérivant l'expression de f par rapport à cette dernière et en considérant les autres comme des constantes.

Dérivées partielles, notations

Parfois, on aura à étudier des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, par exemple $f(x, y)$
Si f est une fonction numérique de plusieurs variables, la fonction dérivée partielle de f par rapport à l'une d'elles s'obtient en dérivant l'expression de f par rapport à cette dernière et en considérant les autres comme des constantes.

Notations : $\frac{\partial f}{\partial x}$ désignera la dérivée de f par rapport à x.

Dérivées partielles, notations

Parfois, on aura à étudier des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, par exemple $f(x, y)$

Si f est une fonction numérique de plusieurs variables, la fonction dérivée partielle de f par rapport à l'une d'elles s'obtient en dérivant l'expression de f par rapport à cette dernière et en considérant les autres comme des constantes.

Notations : $\frac{\partial f}{\partial x}$ désignera la dérivée de f par rapport à x. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$, désignera era la dérivée de f par rapport à y.

Dérivées partielles, notations

Parfois, on aura à étudier des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, par exemple $f(x, y)$

Si f est une fonction numérique de plusieurs variables, la fonction dérivée partielle de f par rapport à l'une d'elles s'obtient en dérivant l'expression de f par rapport à cette dernière et en considérant les autres comme des constantes.

Notations : $\frac{\partial f}{\partial x}$ désignera la dérivée de f par rapport à x. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$, désignera era la dérivée de f par rapport à y.

Exemple : Soit $f(x, y) = x^2y - 3y + 5x + 1$.

Dérivées partielles, notations

Parfois, on aura à étudier des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, par exemple $f(x,y)$
Si f est une fonction numérique de plusieurs variables, la fonction dérivée partielle de f par rapport à l'une d'elles s'obtient en dérivant l'expression de f par rapport à cette dernière et en considérant les autres comme des constantes.

Notations : $\frac{\partial f}{\partial x}$ désignera la dérivée de f par rapport à x. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$, désignera era la dérivée de f par rapport à y.

Exemple : Soit $f(x,y) = x^2y - 3y + 5x + 1$. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 5 \ \ et \ \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3.$$

.

1 Notion de dérivée
- Construction de la fonction dérivée
- Techniques de calcul de la dérivée

2 Intégration
- Notion de primitive
- Intégrales

Notion de primitive

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, on vient de fabriquer une nouvelle fonction, notée f' :

Notion de primitive

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, on vient de fabriquer une nouvelle fonction, notée f' :

$$f \quad \longmapsto \quad f'$$

Notion de primitive

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, on vient de fabriquer une nouvelle fonction, notée f' :

$$f \quad \longmapsto \quad f'$$

On examine un "chemin" de retour...

Notion de primitive

Soit f une fonction de $[a;b] \to \mathbb{R}$, on vient de fabriquer une nouvelle fonction, notée f' :

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & f' \\ & \curvearrowleft & g \end{array}$$

On examine un "chemin" de retour...

Plus précisémment, soit g une fonction,

Notion de primitive

Soit f une fonction de $[a;b] \to \mathbb{R}$, on vient de fabriquer une nouvelle fonction, notée f' :

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & f' \\ ? & \leftarrow & g \end{array}$$

On examine un "chemin" de retour...

Plus précisémment, soit g une fonction, existe t'il une fonction G telle que :

$$G' = g \ ?$$

Notion de primitive

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, on vient de fabriquer une nouvelle fonction, notée f' :

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & f' \\ ? & \hookleftarrow & g \\ G & \longmapsto & G' = g \end{array}$$

On examine un "chemin" de retour...

Plus précisément, soit g une fonction, existe t'il une fonction G telle que :

$$G' = g \ ?$$

primitive

Définition :

Une telle fonction G s'appelle UNE primitive de g.

primitive

Définition :

Une telle fonction G s'appelle UNE primitive de g.

- Il y a une infinité de primitives d'une fonction g, puisque $(G+c)' = g$ où c est une constante.

primitive

Définition :

Une telle fonction G s'appelle UNE primitive de g.

- Il y a une infinité de primitives d'une fonction g, puisque $(G+c)' = g$ où c est une constante.
- On notera momentanément : $G = Primitive(g)$ pour un représentant des primitives de g.

Notion de primitive

Mêmes attentes :

(i) Comprendre l'interprétation, le "sens physique" de la fonction G.

(ii) Connaître la "technique" de fabrication de G, à partir de g.

Notion de primitive

Mêmes attentes :

(i) Comprendre l'interprétation, le "sens physique" de la fonction G.

(ii) Connaître la "technique" de fabrication de G, à partir de g.

Techniques pour trouver une primitive

→ Lire le tableau des dérivées à l'envers !

Techniques pour trouver une primitive

$\rightarrow$ Lire le tableau des dérivées à l'envers !

Exemples : trouver une primitive des fonctions suivantes,

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^3, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$
$$f_4(x) = e^{5x}, \quad f_5(x) = \frac{1}{x}, \quad f_6(x) = 5x + 2.$$

Techniques pour trouver une primitive

On developpera à la fin du cours deux outils pour trouver une primitive,

Techniques pour trouver une primitive

On developpera à la fin du cours deux outils pour trouver une primitive, qui sont les analogues des formules suivantes sur les dérivée :

$$(uv)' = u'v + uv',$$

et

$$(fou)' = u' \times f'(u).$$

Techniques pour trouver une primitive

On developpera à la fin du cours deux outils pour trouver une primitive, qui sont les analogues des formules suivantes sur les dérivée :

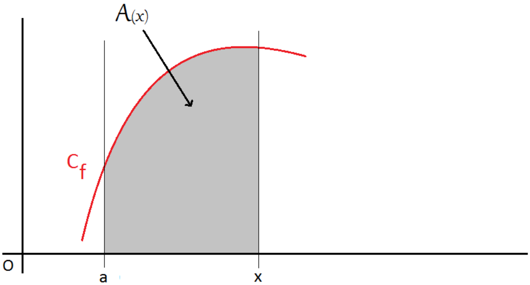
$$(uv)' = u'v + uv',$$

et

$$(fou)' = u' \times f'(u).$$

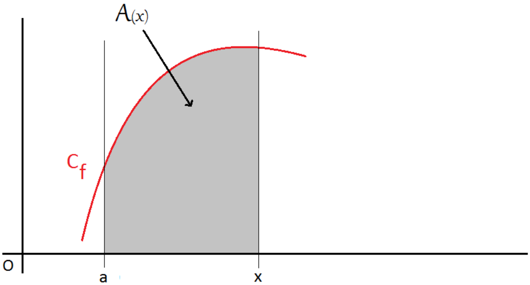
La première correspond à l'IPP et la deuxième à la formule du changement de variable.

Interprétation de la primitive d'une fonction f



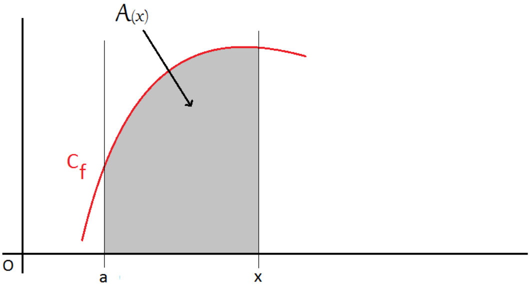
Interprétation de la primitive d'une fonction f

Soit f une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, supposée positive et soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire sous la courbe de f, délimitée entre a, x et (Ox).



Interprétation de la primitive d'une fonction f

Soit f une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, supposée positive et soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire sous la courbe de f, délimitée entre a, x et (Ox).



On cherche à estimer $\mathcal{A}(x)$ pour différents x. On peut déjà noter que $\mathcal{A}(a) = 0$.

Interprétation de la primitive d'une fonction f

Déterminons la dérivée de la fonction $\mathcal{A}$.

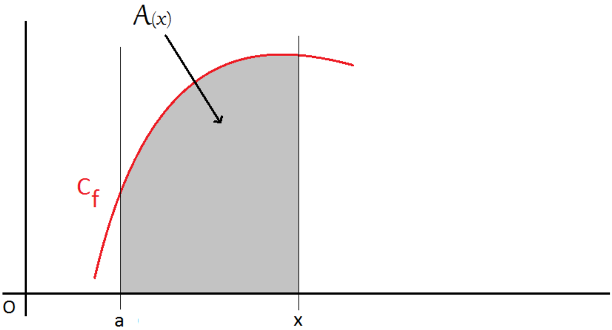
Interprétation de la primitive d'une fonction f

Déterminons la dérivée de la fonction $\mathcal{A}$.

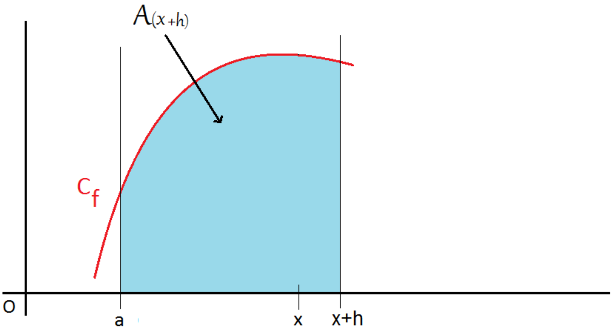
$\rightarrow$ Faute d'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x, on revient au taux de variation. On étudie

$$\frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \quad \text{pour } h \text{ petit.}$$

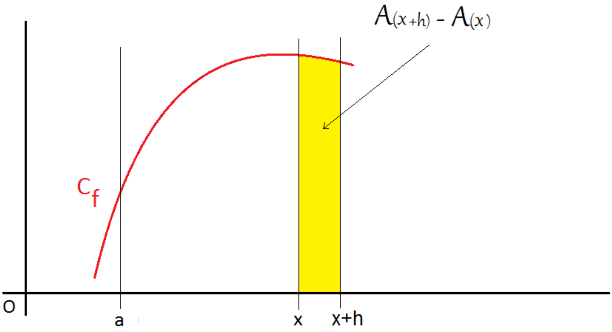
Interprétation de la primitive d'une fonction f



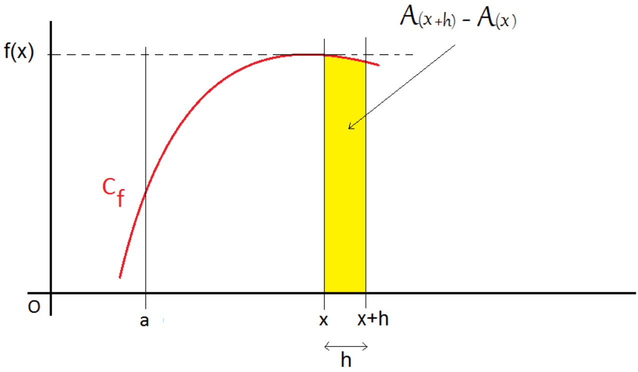
Interprétation de la primitive d'une fonction f



Interprétation de la primitive d'une fonction f



Interprétation de la primitive d'une fonction f



Interprétation de la primitive d'une fonction f

Ainsi, on peut prouver que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$$

Donc,

$$\mathcal{A}' = f,$$

ie : $\mathcal{A}$ est une primitive de f.

Interprétation de la primitive d'une fonction f

Ainsi, on peut prouver que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$$

Donc,

$$\mathcal{A}' = f,$$

ie : $\mathcal{A}$ est une primitive de f.

Or $\mathcal{A}(a) = 0$, donc $\mathcal{A}$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Interprétation de la primitive d'une fonction f

Ainsi, on peut prouver que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$$

Donc,

$$\mathcal{A}' = f,$$

ie : $\mathcal{A}$ est une primitive de f.

Or $\mathcal{A}(a) = 0$, donc $\mathcal{A}$ est la primitive de f qui s'annule en a.

$\rightarrow$ Notation : $\boxed{\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)\, dt.}$

Conséquences

- On a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= [\mathcal{A}]_a^b \\ &= \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a).\end{aligned}$$

Conséquences

- On a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = [\mathcal{A}]_a^b = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a).$$

- On peut étendre cette définition à des fonctions non positives. On compte alors l'aire algébrique.

Quelques propriétés

- Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_b^c f(t)\ dt.$$

Quelques propriétés

- Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_b^c f(t)\ dt.$$

- Linéarité : pour tout λ réel et pour toutes fonctions f et g,

$$\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(t) + \int_a^b g(t)\ dt.$$

Quelques propriétés

- Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_b^c f(t)\ dt.$$

- Linéarité : pour tout λ réel et pour toutes fonctions f et g,

$$\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(t) + \int_a^b g(t)\ dt.$$

- Croissance : pour toutes fonctions $f,\ g$ et pour tous nombres $a \leqslant b$, on a :

$$\Big(\forall x \in [a;b],\quad f(x) \leqslant g(x)\Big) \ \Rightarrow\ \int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt.$$

Exemples

Calculer :

$$I_1 = \int_1^2 t \; dt, \qquad I_2 = \int_0^4 5 \; dt, \qquad I_3 = \int_0^2 e^{3x} \; dx,$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 x^4 + 6x^5 \; dx, \qquad I_5 = \int_2^6 \frac{1}{x} \; dx, \qquad I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \; dx.$$

Quelques méthodes pour calculer des intégrales

Quelques méthodes pour calculer des intégrales

- Intégration par parties (IPP)

Quelques méthodes pour calculer des intégrales

- Intégration par parties (IPP)
- Formule du changement de variable.

Intégration par parties

Soit u, v deux fonctions dérivables.

Intégration par parties

Soit u, v deux fonctions dérivables.

- On sait que $(uv)' = u'v + uv'$.

Intégration par parties

Soit u, v deux fonctions dérivables.

- On sait que $(uv)' = u'v + uv'$.
- Cette formule intégrée donne

$$Primitive(u'v) = uv - Primitive(uv').$$

Intégration par parties

Soit u, v deux fonctions dérivables.

- On sait que $(uv)' = u'v + uv'$.
- Cette formule intégrée donne
$$Primitive(u'v) = uv - Primitive(uv').$$
Et on a également :
$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Intégration par parties

Soit u, v deux fonctions dérivables.

- On sait que $(uv)' = u'v + uv'$.
- Cette formule intégrée donne

$$Primitive(u'v) = uv - Primitive(uv').$$

Et on a également :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Intégration par parties

Soit u, v deux fonctions dérivables.

- On sait que $(uv)' = u'v + uv'$.
- Cette formule intégrée donne

$$Primitive(u'v) = uv - Primitive(uv').$$

Et on a également :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Ainsi, primitiver $u'v$ revient à primitiver uv', qui est parfois plus facile...

Intégration par parties, exemple

Calculer $\int_1^2 t \ln(t)\; dt$.

Intégration par parties, exemple

Calculer $\int_1^2 t\ln(t)\ dt$. On pose,

$$\begin{cases} u'(t) = t & \textit{donc} \quad u(t) = t^2/2 \\ v(t) = \ln(t) & \textit{donc} \quad v'(t) = 1/t \end{cases}$$

Intégration par parties, exemple

Calculer $\int_1^2 t\ln(t)\,dt$. On pose,

$$\begin{cases} u'(t) = t & \textit{donc} \quad u(t) = t^2/2 \\ v(t) = \ln(t) & \textit{donc} \quad v'(t) = 1/t \end{cases}$$

On applique la formule : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

Intégration par parties, exemple

Calculer $\int_1^2 t\ln(t)\ dt$. On pose,

$$\begin{cases} u'(t) = t & \textit{donc} \quad u(t) = t^2/2 \\ v(t) = \ln(t) & \textit{donc} \quad v'(t) = 1/t \end{cases}$$

On applique la formule : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. On obtient,

$$\int_1^2 t\ln(t)\ dt = [\frac{t^2}{2}\ln(t)]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t}\ dt$$

Intégration par parties, exemple

Calculer $\int_1^2 t\ln(t)\ dt$. On pose,

$$\begin{cases} u'(t) = t & \textit{donc} \quad u(t) = t^2/2 \\ v(t) = \ln(t) & \textit{donc} \quad v'(t) = 1/t \end{cases}$$

On applique la formule : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. On obtient,

$$\int_1^2 t\ln(t)\ dt = [\tfrac{t^2}{2}\ln(t)]_1^2 - \int_1^2 \tfrac{t^2}{2} \times \tfrac{1}{t}\ dt$$

Puis,

$$\begin{aligned} \int_1^2 t\ln(t)\ dt &= 2\ln(2) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - (1 - 1/4) = 2\ln(2) - 3/4. \end{aligned}$$

Formule du changement de variable

Formule du changement de variable

Proposition (Version1)

Soit f une fonction numérique continue, et φ une fonction de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et dont la dérivée est continue) sur un intervalle $[a, b]$ et dont l'image est contenue dans le domaine de définition de f. Alors, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx.$$

Formule du changement de variable

Proposition (Version1)

Soit f une fonction numérique continue, et φ une fonction de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et dont la dérivée est continue) sur un intervalle $[a,b]$ et dont l'image est contenue dans le domaine de définition de f. Alors, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx.$$

Remarques :

- De la gauche vers la droite, on dit formellement que l'on pose $x = \varphi(t)$ et on a $dx = \varphi'(t)dt$.

Formule du changement de variable

Proposition (Version1)

Soit f une fonction numérique continue, et φ une fonction de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et dont la dérivée est continue) sur un intervalle $[a, b]$ et dont l'image est contenue dans le domaine de définition de f. Alors, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx.$$

Remarques :

- De la gauche vers la droite, on dit formellement que l'on pose $x = \varphi(t)$ et on a $dx = \varphi'(t)dt$.
- Si on applique la formule de la droite vers la gauche, $\int_\alpha^\beta f(x)\ dx = ...$ choisir une fonction φ telle que φ' ne s'annule pas. (C^1 difféomorphisme)

Formule du changement de variable

Formule du changement de variable

Proposition (Version 2)

Soit f une fonction numérique continue, et φ une fonction de classe C^1 bijective (C^1 difféomorphisme) dont l'image contient $[\alpha;\beta]$. Alors, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Formule du changement de variable

Proposition (Version 2)

Soit f une fonction numérique continue, et φ une fonction de classe C^1 bijective (C^1 difféomorphisme) dont l'image contient $[\alpha;\beta]$. Alors, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Remarques : Cas particuluier, φ strictement monotone.

Formule du changement de variable, exemple

Formule du changement de variable, exemple

Calculer à l'aide d'un changement de variable $\int_0^1 te^{t^2}\, dt$.

Formule du changement de variable, exemple

Calculer à l'aide d'un changement de variable $\int_0^1 te^{t^2}\, dt$.
On pose $x = t^2$, formellement "$dx = 2t\, dt$".

Formule du changement de variable, exemple

Calculer à l'aide d'un changement de variable $\int_0^1 te^{t^2}\ dt$.
On pose $x = t^2$, formellement "$dx = 2t\ dt$". (*On remplace donc, le "dt" par "$\frac{dx}{2t}$".)*

$$\int_0^1 te^{t^2}\ dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{t^2} 2t\ dt = \frac{1}{2}\int_{0^2}^{1^2} e^x\ dx = \frac{1}{2}[e^x]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Rappel de la formule : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$.